



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

15. November 2010

# Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist.

**Aufgabe 2:** Sei  $I = [0, 1]$  und definiere  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  integrierbar aber keine Regelfunktion ist.

**Aufgabe 3:** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe mit  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Definiere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ a_n & \text{falls } n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  integrierbar ist und

$$\int f dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

gilt.

**Aufgabe 4:** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und kompakt und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zeigen Sie, dass ein  $a \in A$  existiert mit:

$$\int_A f dx = f(a) \cdot \int \mathbf{1}_A dx$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 15. November 2010 im Übungskasten.



Andreas Fackler

15. November 2010

# Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

## Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

**Aufgabe 1:** Für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist die Menge  $A_n = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  aller Brüche mit Nenner  $n$  abzählbar, da die Funktion

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n, f(k) = \begin{cases} \frac{m}{n} & \text{falls } k = 2m \\ -\frac{l}{n} & \text{falls } k = 2l - 1 \end{cases}$$

surjektiv ist. Als Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist auch  $\mathbb{Q}$  abzählbar:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Aufgabe 2:** Nach Aufgabe 1 gibt es ein surjektives  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Dann ist für jedes  $N \in \mathbb{N}$  die Funktion

$$g_N := \max_{0 \leq k \leq N} \mathbf{1}_{\{h(k)\}}$$

als Maximum endlich vieler Treppenfunktionen selbst eine Treppenfunktion und es gilt:

$$0 \leq g_N \leq \sum_{0 \leq k \leq N} \mathbf{1}_{\{h(k)\}}$$

Wegen der Monotonie und Linearität des Integrals folgt hieraus:

$$0 \leq \int g_N dx \leq \sum_{0 \leq k \leq N} \int \mathbf{1}_{\{h(k)\}} dx = 0$$

Die  $g_N$  bilden also eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit Integral 0, die punktweise gegen  $f$  konvergiert. Nach dem kleinen Satz von Levi folgt hieraus, dass  $f$  integrierbar ist mit Integral 0.

Jedoch ist  $f$  keine Regelfunktion, denn es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ , aber auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ , also existiert in 0 der rechtsseitige Limes  $\lim_{x \searrow 0} f(x)$  nicht.

**Aufgabe 3:** Die Folge von Treppenfunktionen

$$g_N = \sum_{n=0}^N a_n \cdot \mathbf{1}_{[n, n+1)}$$

wächst monoton und konvergiert punktweise gegen  $f$ . Die Integrale

$$\int g_N dx = \sum_{n=0}^N a_n \cdot v([n, n+1)) = \sum_{n=0}^N a_n$$

sind durch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  beschränkt. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also ihr punktweiser Limes  $f$  integrierbar mit Integral

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

**Aufgabe 4:** (Fehler in der Angabe: Für  $A = \emptyset$  ist die Aussage natürlich falsch.)

Da  $A$  kompakt und  $f$  stetig ist, nimmt  $f$  sein Minimum  $m \in \mathbb{R}$  und Maximum  $M \in \mathbb{R}$  auf  $A$  an. Dann gilt  $m \leq f \leq M$ , also wegen der Monotonie des Integrals:

$$m \cdot \int \mathbf{1}_A dx = \int_A m dx \leq \int_A f dx \leq \int_A M dx = M \cdot \int \mathbf{1}_A dx$$

Ist  $\int \mathbf{1}_A dx = 0$ , so können wir  $a$  beliebig wählen. Andernfalls gibt es, da  $A$  zusammenhängend ist, nach dem Zwischenwertsatz ein  $a \in A$  mit:

$$f(a) = \frac{\int_A f dx}{\int \mathbf{1}_A dx}$$